- **Théorème 1.8**

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

l'app $\Phi : \begin{array}{ccc} E/\ker f & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ \bar{x} & \longmapsto & \Phi(\bar{x}) = f(x) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On dit que $E/\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphe

---

on définit la relation suivante dans E

$x R y \iff x - y \in \ker(f)$ pour $x, y \in E$.

La relation R est une relation d'équivalence
- Réflexive
- Symétrique
- transitive

les classes d'équivalences correspondant à cette relation d'équivalence sont :

$\bar{x} = x + \ker f = \{x + a \mid a \in \ker(f)\}$.

→ l'espace quotient, noté E/F, est l'ensemble de tous les classes d'équivalence.

$E/\ker f = \{\bar{x} \mid x \in E\}$

on peut munir $E/\ker f$ d'une structure vectoriel :

$\begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} \\ \lambda \bar{x} = \overline{\lambda x} \end{cases}$ pour $\bar{x}, \bar{y} \in E/\ker f$, $\lambda \in \mathbb{R}$

→ l'espace quotient $(E/\ker f, +, \cdot)$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.

Scanné avec CamScanner

- ϕ est linéaire

Soient $\bar{x}, \bar{y} \in E/\ker f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\phi(\lambda\bar{x}+\bar{y}) = \phi(\overline{\lambda x+y}) = f(\lambda x+y)$$
$$= \lambda f(x) + f(y) \quad (\leftarrow f \text{ est linéaire})$$
$$= \lambda \phi(\bar{x}) + \phi(y)$$

- ϕ est bijective

→ ϕ est surjective par construction

→ Soit $\bar{x} \in E/\ker f$

$$\phi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$\Rightarrow x \in \ker(f)$$
$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

donc ϕ est injective

Conclusion ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

on dit que $E/\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphe

Rq: (Dans le cas de dimension finie)

$$\dim E/\ker f = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Scanné avec CamScanner

Théorème 1.9

E un esp vectoriel de dimension finie, F sous. ev. de E

Alors $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$

Soit G un supplémentaire de F dans E,

càd $E = F \oplus G$

on considère la projection sur G parallèlement à F

$$p : E = F \oplus G \longrightarrow E$$
$$x = a + b \longrightarrow b.$$

→ P est un endomorphisme

$\ker(p) = F$

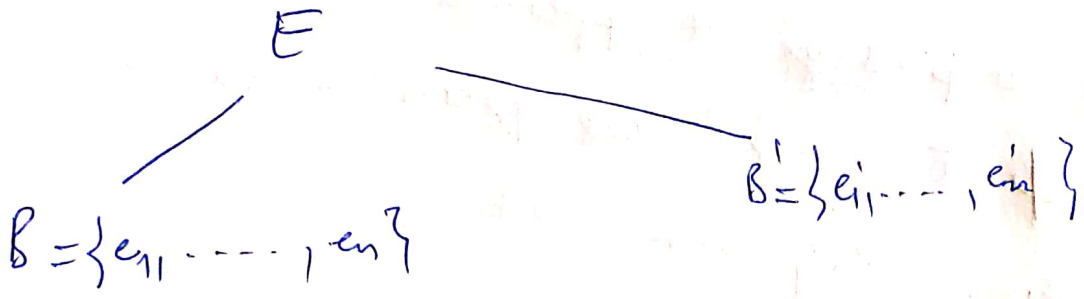
$\mathrm{Im}(p) = G$

D'après th 1.8 : $E/\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont isomorphes

donc $\dim E/F = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(G)$

c'ad $\boxed{\dim E/F = \dim E - \dim F}$

Scanné avec CamScanner



$$e'_1 = \sum_{j=1}^{n} P_{j1} e_j = P_{11} e_1 + P_{21} e_2 + \cdots + P_{n1} e_n$$

$$\vdots$$

$$e'_n = P_{1n} e_1 + \cdots + P_{nn} e_n$$

La matrice de passage de B à B' est

$$P_{BB'} = (P_{ij})_{i,j=1\cdots n} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

↑ les composantes de e'_1 dans B

Scanné avec CamScanner

Matrice de passage et application linéaire.

Soit $\phi : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

$\begin{cases} B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base de } E \\ B_2 = \{e'_1, \dots, e'_n\} \end{cases}$

$\begin{cases} B'_1 = \{f_1, \dots, f_p\} \text{ base de } F \\ B'_2 = \{f'_1, \dots, f'_p\} \end{cases}$

$M = M_{B_1 B'_1}(\phi)$ = la matrice de ϕ par rapport aux bases B_1 et B'_1

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \xrightarrow{\phi} & (F, B'_1) \\ \downarrow P_{B_1 B_2} & & \downarrow \\ (E, B_2) & \xrightarrow{M_1} & (F, B'_2) \end{array}$$

La matrice de ϕ par rapport aux bases B_2 et B'_2 est

$$M' = M_{B_2 B'_2}(\phi) = P_{B_2 B_1} \cdot M_{B_1 B'_1} \cdot P_{B'_1 B'_2}$$

Cas particulier

$\phi : (E, B_1) \longrightarrow (E, B_1)$ endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \longrightarrow & (E, B_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E, B_2) & \longrightarrow & (E, B_2) \end{array}$$

$$M_{B_2}(f) = P_{B_2 B_1} \cdot M_{B_1 B_1}(f) \cdot P_{B_1 B_2}$$

$$\boxed{M_{B_2}(f) = (P_{B_1 B_2})^{-1} \cdot M_{B_1}(f) \cdot P_{P_1 P_2}}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice $\phi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique)

$\phi(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$

posons $\lambda_i = \phi(e_i)$ pour $i = 1, \dots n$

donc $\phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

Conclusion

$\phi \in (\mathbb{K}^n)^*$ $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$: $\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Scanné avec CamScanner

Proposition 26

E un $\mathbb{K}$-e.v.

H un sous espace vectoriel de E

(1) H hyperplan de E

(2) $\exists$ une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.

Si de plus $\dim E = n$, les conditions précédentes sont équivalentes à

(3) $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n - 1$

Preuve

1) $\Rightarrow$ 2)

H est un hyperplan de $E \Rightarrow \exists \phi \in E^* \setminus \{0\}$ forme linéaire non nulle

tque $H = \ker(\phi)$

$\phi \neq 0 \Rightarrow \exists u \in E \quad (u \neq 0)$ tque $\phi(u) \neq 0$

on considère la droite $D = \langle u \rangle = \mathbb{K}u$: sous esp vect engendré par u.

Montrons que : $E = D \oplus H$

(Rappel : $E = H \oplus D \Leftrightarrow \begin{cases} D \cap H = \{0\} \\ E = D + H \end{cases}$)

- Soit $x \in D \cap H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tque : $x = \lambda u$ et $\phi(x) = 0$

$\Rightarrow \lambda \phi(u) = 0$.

$\Rightarrow \lambda = 0$ (car $\phi(u) \neq 0$)

Donc $x = 0$, ce qui montre que $D \cap H = \{0\}$.

- Reste à montrer que $E = D + H$.

En effet : Soit $x \in E$, posons : $\lambda = \dfrac{\phi(x)}{\phi(u)}$.

et $y = x - \dfrac{\phi(x)}{\phi(u)} u = x - \lambda u$.

Scanné avec CamScanner

on a: $\phi(y) = \phi(u) - \frac{\phi(x)}{\phi(u)}\phi(u) = 0$

$\Rightarrow y \in \ker(\phi) = H$.

D'où $x = \underbrace{y}_{\in H} + \underbrace{\lambda u}_{\in D} \in H + D$

Ce qui prouve que $\boxed{E = H \oplus D}$

2) $\Rightarrow$ 1) Si $E = H \oplus D$ où $D = \mathbb{K}u$. $(u \neq 0)$.

On considère l'application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$
$x = h + \lambda u \longrightarrow \lambda$

$\rightarrow \phi$ est bien une forme linéaire

$\rightarrow x = h + \lambda u \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \lambda = 0$
$\Leftrightarrow x = h \in H$

$\Rightarrow \ker(\phi) = H$

Ce qui prouve que H est un hyperplan de E.

Remarque Si $\dim E = n$.

2) $\Rightarrow$ 3) Comme $E = H \oplus D$
alors $\dim H = \dim E - \dim(D)$
$= n - 1$

3) $\Rightarrow$ 2) Evident.

Scanné avec CamScanner

Base duale

Proposition 2.10

$E = \mathbb{K}$-e.v. $\quad \dim E = n$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de E

forme coordonnée : $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto e_i^*(x) = x_i$

$\forall i \in [1,n]$, e_i^* est une forme linéaire sur E appelé forme coordonnée.

et on a : $\forall i,j \in [1,n]$ $\quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

(C'est l'équation de Kronecker).

Alors la famille $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est base de E^* appelée : base duale de $\mathcal{B}$.

En effet

Soit $\varphi \in E^*$.

et posons $\phi := \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$ c'est une forme linéaire sur E car c'est une combinaison linéaire des formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$.

Pour tout $j \in [1,n]$ on a :

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(e_j) = \varphi(e_j)$$

$\Rightarrow$ ϕ et φ coincident sur une base de E

$\Rightarrow \phi = \varphi$ $\quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$

Par conséquent $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une famille génératrice de E^*

c.à.d $\dim E^* \leq \dim E = n = \operatorname{card}(\mathcal{B}^*)$, la famille $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*. ∎

Scanné avec CamScanner

Proposition 2.11

E = un $\mathbb{K}$-e.v.

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de E

$\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ sa base duale

1) $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$

en effet $x \in E \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

pour $j \in \{1, \dots, n\}$: $e_j^*(x) = e_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_j^*(e_i)$ $\quad (e_j^*(e_i) = \delta_{ij})$

$= \lambda_j$

D'où $\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i}$

2) $\forall \varphi \in E^* : \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$

en effet

$\varphi \in E^* \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$ $\quad (\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ base de $E^*)$

$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j)$

$\varphi(e_j) = \lambda_j$

D'où $\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*}$

Scanné avec CamScanner